Hessen-2010-Infinitesimalrechnung (Analysis)- A1-LK

Gegeben: $g_a(x) = 2a \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ und $w_a(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$

1)

- $g_a{}'(x) = -\frac{x}{a} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$; $g_a{}'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$g_a{}''(x) = -\frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2}} + \frac{x^2}{2a^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \left(-\frac{1}{a} + \frac{x^2}{2a^3}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow$$

$g_a{}''(0) = -\frac{1}{a} < 0$, also ein relativer Hochpunkt $H(0 \mid 2a)$

- $g_a(x) = g_a(-x)$ und $w_a(x) = w_a(-x)$, weil x nur in der 2. Potenz vorkommt
- $w_a{}'(x) = \frac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2} \Rightarrow w_a{}''(x) = \frac{-16a^3(x^2+4a^2)+64a^3x^2}{(x^2+4a^2)^3}$

$= \frac{-64a^5+48a^3x^2}{(x^2+4a^2)^3} \Rightarrow w_a{}''(x) = 0 \Leftrightarrow -64a^5 + 48a^3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$

2.1) Wir zerlegen die Fläche A zwischen der x-Achse und dem Graphen g_a zwischen 0 und 4 in n gleichhohe Trapeze mit der Höhe $\Delta x = \frac{4}{n}$. Das i. te Trapez hat dann den Flächeninhalt

$$A_i = \frac{g_2(i\cdot\Delta x) + g_2((i-1)\cdot\Delta x)}{2} \cdot \Delta x = 2 \cdot \frac{g_2(i\cdot\frac{4}{n}) + g_2((i-1)\cdot\frac{4}{n})}{n} =$$

$$\frac{2}{n} \cdot \left(4 \cdot e^{-\frac{i^2}{4n^2}} + 4 \cdot e^{-\frac{(i-1)^2}{4n^2}}\right) = \frac{8}{n} \cdot \left(e^{-\frac{i^2}{4n^2}} + e^{-\frac{(i-1)^2}{4n^2}}\right)$$

$\Rightarrow$Das Integral $\int_{-4}^{4} g_2(x)dx$ lässt sich dann annähern durch $A = 2\sum_{i=1}^{n} A_i$ **bzw.**

$A = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{i=1}^{n} A_i$

2.2) Es muss gelten: $W_a'(x) = w_a(x)$
Ableitung bilden:

$$W_a'(x) = 4a^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \frac{4a^2}{2a} = \frac{2a}{\frac{4a^2+x^2}{4a^2}} = \frac{4a^2 \cdot 2a}{4a^2+x^2}$$
$$= \frac{8a^3}{4a^2+x^2} = w_a(x)$$

3) $W_a(x) = 4a^2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2a}\right) \Rightarrow W_a'(x) = 4a^2 \cdot \arctan'\left(\frac{x}{2a}\right) = \frac{4a^2 \cdot \frac{1}{2a}}{1+\frac{x^2}{4a^2}} = \frac{2a}{1+\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \frac{4a^2}{4a^2} =$

$\frac{8a^3}{x^2+4a^2} = w_a(x)$

4) Wir verschieben beide Graphen um –0,1 und bilden zu $w^*(x) = w_{0,5}(x) - 0{,}1$ und $g^*(x) = w_{0,5}(x) - 0{,}05$ die Rotationsvolumina. Dazu benötigen wir zunächst die Nullstellen: $w^*(x) = w_{0,5}(x) - 0{,}1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} - 0{,}1 = 0 \Rightarrow 0{,}1x^2 + 0{,}1 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$

$g^*(x) = w_{0,5}(x) - 0{,}05 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} - 0{,}05 = 0 \Rightarrow 0{,}05x^2 + 0{,}05 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{19}$

Also $V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\sqrt{19}}^{\sqrt{19}} \left(\frac{1}{x^2+1} - 0{,}05\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{x^2+1} - 0{,}1\right)^2 dx =$

$= 4.13423 \cdot \pi - 3.48537\pi \approx 2{,}04$